Gjornâl Furlan des Siencis **10.** 2008, 61-73

Une justificazion rigorose aes formulis di progjetazion pe torsion in profilâts sutîi

CESARE DAVINI* & ROBERTO PARONI† & ERIC PUNTEL‡

Ristret. Si oten, midiant di une derivazion cetant direte, il Γ-limit pal probleme da la torsion su di un profîl retangolâr sutîl cuant che il spessôr al tint a zero. A son calcolâts i sfuarçs limit e la nature distribuzionâl di une des componentis di sfuarç e je metude in clâr.

Peraulis clâf. Torsion,trâfs a parêt sutile,metodiche asintotiche,Γ-convergjence.

1. Introduzion. Come che ben si sa, soluzions esatis pal probleme da la torsion a son disponibilis dome par pôcs câs speciâi. Soluzions analitichis a son stadis buridis fûr pe prime volte di de Saint-Venant tal 1855 [4] par sezions di gjeometrie semplice come elissis e retangui. Altris metodis di soluzion, plui o mancul gjenerâls o facii di aplicâ, a forin introdusûts tal secul seguitîf. O rimandìn al datât ma interessant articul di Higgins [6] par une recension esaustive su la cuestion.

Ancje cuant che a son disponibilis però, lis soluzions in forme sierade a son dificilmentri dopradis te pratiche inzegniristiche cuotidiane, e si preferissin invezit formulis prossimadis di progjetazion; chest al è specialmentri il câs par lis trâfs in parêt sutile, cilindris snei vint sezion componude di elements di spessôr trascurabil rispiet a la lungjece de lôr linie mezane, che a son une vore impleadis par il lôr favorevul rapuart jenfri pês e rigjidece.

---

* Dipartiment di Gjeorisorsis e Teritori, Universitât dal Friûl, Udin, Italie. E-mail: cesare.davini@uniud.it
† Dipartiment di Architeture e Planificazion, Universitât dai Studis di Sassari, Alghero, Italie. E-mail: paroni@uniss.it
‡ Dipartiment di Gjeorisorsis e Teritori, Universitât dal Friûl, Udin, Italie. E-mail: eric.puntel@uniud.it

Chest lavôr al considere la istance plui sempliç pussibil di profilât sometût a torsion: chê di un retangul sutîl. Par chest câs, i sfuarçs torsionâi otignûts midiant di une formule prossimade a dan cont dome di metât dal moment stuarzint efetivementri agjent, come rimarcât bielzà di Kelvin e Tait [7]. Chescj autôrs a calcolarin il limit de soluzion in serie al tindi a zero dal spessôr e a atribuirin la metât mancjant dal moment stuarzint a trazions (fuarcis par unitât di superficie) nulis dapardut fûr che a distance "infinitementri piçule" dai lâts curts dal retangul.

Al è pussibil stabilî la validitât di une formule prossimade cence vê di doprâ o cognossi la soluzion analitiche par un spessôr finît. Par chel che o savìn, i prins a fâlu pal nestri câs a forin Rodriguez e Viaño [13, 14], che a studiarin il compuartament al limit des soluzions da la ecuazion di Poisson par mieç di tecnichis di analisi funzionâl. Studiant i problemis di Dirichlet e Neumann associâts a la torsion di une sezion sutile, a cjatarin la funzion dai sfuarçs limit e ancje l'ingobament limit. La lôr tratazion strucade no discut però i sfuarçs limit (che si otegnin par derivazion des funzions parsore). Dell'Isola e Rosa [5] invezit a àn di resint doprât il metodi des espansions asintotichis par calcolâ i prins trê tiermins da la espansion lassant di bande la discussion da lis proprietâts di convergjence.

Achì o scrutinìn une alternative basade su la Γ-convergjence che e stabilìs la validitât di risultâts asintotics, includûts i sfuarçs, su fondis rigorosis.

Tai ultins agns la Γ-convergjence e je stade une vore aplicade intune varietât di problemis mecanics. Par restâ dongje dal probleme achì scrusignât, la Γ-convergjence e je stade doprade par furnî justificazion [1, 8], estension e formulazion [2, 11] di modei struturâi caraterizâts de riduzion dimensionâl. Par chel che al inten la torsion, o ricuardìn la deduzion des formulis di Bredt par sezions cun celis ugnulis [9] e multiplis [10] furnide di Morassi.

In struc, o formulìn il probleme da la torsion in forme variazionâl suntun retangul doprant la funzion dai sfuarçs di Prandtl. Stant che il spessôr dal retangul al scjale, o ben al dipent in maniere liniâr, di un parametri ε, o riscjalìn il domini dal probleme in mût che al vedi dimensions fissis e o calcolìn il Γ-limit da la sucession di funzionâi al tindi a zero di ε. Cussì o derivìn in mût consistent no dome il probleme limit di analizâ ma ancje la dimostrazion che la sucession dai minimizadôrs dai funzionâi e converç al minimizadôr dal probleme limit. Doprant la metodiche de Γ-convergjence o otignìn: (1) la derivazion daurman dal funzionâl limit, (2) il calcul dal pâr diret dai sfuarçs limit, (3) il sclariment dai spazis funzionâi dulà che lis trazions limit a converzin specificant in chest mût la lôr nature distribuzionâl. O crodìn che i ultins doi ponts a sedin i principâi risultâts di chest lavôr.

2. Torsion in dominis retangolârs sutîi. O considerìn la torsion di De Saint-Venant par une trâf cun sezion retangolâr sometude a un moment stuarzint $\tilde{M}^\varepsilon$. O assumìn che la trâf e sedi omogjenie, isotrope, elastiche liniâr cun modul di tai μ e sezion trasversâl $\tilde{\Omega}_\varepsilon = (-a/2, a/2) \times (-\varepsilon b/2, \varepsilon b/2)$. Nus interesse la caraterizazion dal limit asintotic da la distribuzion dai sfuarçs cuant che il parametri ε al tint a zero. Denotìn cun $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$ i vetôrs di base di un sisteme Cartesian ortogonâl cun origjin tal centri dal retangul cun as $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ come mostrât te Figure 1. Anìn daûr a la formulazion proponude pe prime volte di Prandtl

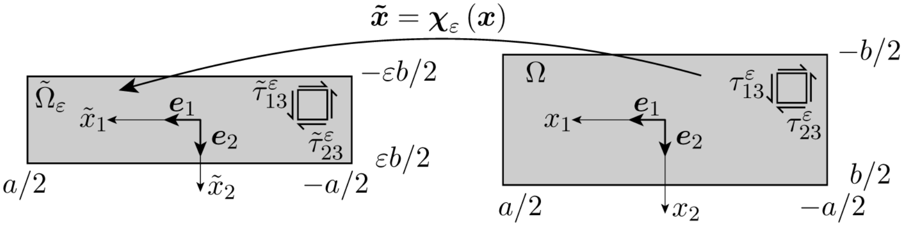

Figure 1. Domini corint (sutîl) e di riferiment (fis).

tal 1903 [12], fasint dipendi il vetôr des trazions tangjenziâls $\tilde{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon$ di une funzion dai sfuarçs $\tilde{\psi}^\varepsilon_m$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon = -\mu\,\alpha\left(\boldsymbol{e}_3 \times \nabla\tilde{\psi}^\varepsilon_m\right). \tag{1}$$

dulà che $\times$ al indiche il prodot vetoriâl e α al è l'angul di torsion par unitât di lungjece, val a dî la rotazion relative di dôs sezions a distance unitarie.

La funzion dai sfuarçs $\tilde{\psi}_m^\varepsilon$ e je determinade dal probleme al contor

$$\begin{cases} \triangle\tilde{\psi}_m^\varepsilon & = -2 \quad \text{in } \tilde{\Omega}_\varepsilon, \\ \tilde{\psi}_m^\varepsilon & = 0 \quad \text{su } \partial\tilde{\Omega}_\varepsilon. \end{cases} \tag{2}$$

Definìn il funzionâl $\tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon : H_0^1(\tilde{\Omega}_\varepsilon) \to \mathbb{R}$:

$$\tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon(\tilde{\psi}) := \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} |\nabla\tilde{\psi}|^2 - 4\tilde{\psi}\, d\tilde{a},$$

alore o podìn meti il probleme (2) in forme variazionâl

$$\tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon(\tilde{\psi}_m^\varepsilon) = \min_{\tilde{\psi}\in H_0^1(\tilde{\Omega}_\varepsilon)} \tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon(\tilde{\psi}). \tag{3}$$

Par podê considerâ la soluzion limit dal probleme variazionâl (3) cuant che ε al tint a zero al conven rapresentâ lis funzions su di un domini fis $\Omega = (-a/2, a/2) \times (-b/2, b/2)$ midiant di une trasformazion di coordenadis $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon : \Omega \to \tilde{\Omega}_\varepsilon$, cussì definide

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \boldsymbol{\chi}_\varepsilon(x_1, x_2) := (x_1, \varepsilon x_2). \tag{4}$$

La mape $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon$ e stabilìs jenfri lis funzions definidis tai doi dominis $\tilde{\Omega}_\varepsilon$ e Ω une corispondence naturâl

$$\tilde{\psi} = \psi \circ \boldsymbol{\chi}_\varepsilon^{-1}, \tag{5}$$

che e je cun di fat un isomorfisim fra $H_0^1(\tilde{\Omega}_\varepsilon)$ e $H_0^1(\Omega)$. Di chi indevant o denotìn cuntune tilde segnade parsore lis funzions definidis tal domini fisic $\tilde{\Omega}_\varepsilon$. Da la ecuazion (5) al ven fûr che

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \circ \boldsymbol{\chi}_\varepsilon^{-1} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}_2} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} \circ \boldsymbol{\chi}_\varepsilon^{-1} \tag{6}$$

Fasint un cambiament di variabilis e tignint cont de (6), il funzionâl $\tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon$ al devente

$$\tilde{\mathcal{F}}^\varepsilon(\tilde{\psi}) = \varepsilon \int_\Omega \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2 - 4\psi\, da =: \mathcal{F}^\varepsilon(\psi), \tag{7}$$

definint cussì un gnûf funzionâl $\mathcal{F}^\varepsilon : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. La funzion dai sfuarçs cirude $\psi_m^\varepsilon = \tilde{\psi}_m^\varepsilon \circ \boldsymbol{\chi}_\varepsilon^{-1}$ e minimize cumò il funzionâl $\mathcal{F}^\varepsilon$, ven a stâi

$$\mathcal{F}^\varepsilon(\psi_m^\varepsilon) = \min_{\psi\in H_0^1(\Omega)} \mathcal{F}^\varepsilon(\psi). \tag{8}$$

3. Il probleme limit. O larìn cumò a studiâ il compuartament limit dal probleme variazionâl definît tal lis ecuazions (7) e (8). Cjapìn in considerazion une sucession di potenziâi ψ^{ε}[§] tâl che il funzionâl $\mathcal{F}^{\varepsilon}/\varepsilon^3$ al sedi limitât tal spazi

$$W := L^2\left(\left(-\tfrac{a}{2},\tfrac{a}{2}\right); H_0^1\left(-\tfrac{b}{2},\tfrac{b}{2}\right)\right),$$

dotât de norme

$$\|\psi\|_W^2 = \int_{-a/2}^{a/2} \|\psi\|^2_{L^2(-b/2,b/2)} + \left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right\|^2_{L^2(-b/2,b/2)} dx_1.$$

O tachìn mostrant un risultât preliminâr.

Disavualiance 1 (simil Poincaré)**.**
Par dutis lis g in $H_0^1(\Omega)$ $: \|g\|_{L^2(\Omega)} \le b\left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\Omega)}$.

Dimostrazion. Suponìn sul prin che g a apartegni a $H_0^1(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$, alore

$$g(x_1,x_2) - \cancel{g(x_1,-b/2)} = \int_{-b/2}^{x_2} \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,s)\, ds\,.$$

Pe disavualiance di Jensen,

$$g^2 \le \left(b \fint_{-b/2}^{b/2}\left|\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,s)\right| ds\right)^2 \le b\int_{-b/2}^{b/2}\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,s)\right)^2 ds\,.$$

Integrant sul domini Ω sedi a drete che a çampe dal avuâl, si oten:

$$\|g\|^2_{L^2} \le b^2\left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|^2_{L^2}$$

La tesi e seguìs par densitât.

[§] Cuntun piçul abûs di notazion o clamìn sucessions ancje fameis indicizadis di un parametri continui $\varepsilon\in(0,1)$.

Leme 2 (Limitatece).
E sedi $\{\psi^\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega)$ *une sucession tâl che* $\sup_\varepsilon \frac{\mathcal{F}^\varepsilon(\psi^\varepsilon)}{\varepsilon^3} < +\infty$. *Alore*

$$\sup_\varepsilon \left\| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)} < +\infty \qquad e \qquad \sup_\varepsilon \left\| \frac{\psi^\varepsilon}{\varepsilon^2} \right\|_W < +\infty\,.$$

Dimostrazion. Par ipotesi e par vie de (7)

$$+\infty > \frac{\mathcal{F}^\varepsilon(\psi^\varepsilon)}{\varepsilon^3} = \int_\Omega \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_2} \right)^2 - 4\, \frac{\psi^\varepsilon}{\varepsilon^2}\, da$$

Doprant la disavualiance di Young: $c\,d \le \delta\, c^2 + \frac{1}{4\,\delta}\, d^2$ par ducj i $\delta > 0$, e la Disavualiance 1, o vin

$$\frac{\mathcal{F}^\varepsilon(\psi^\varepsilon)}{\varepsilon^3} \ge \int_\Omega \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2\,b^2} \left(\frac{\psi^\varepsilon}{\varepsilon^2} \right)^2 - \delta \left(\frac{\psi^\varepsilon}{\varepsilon^2} \right)^2 - \frac{1}{4\,\delta} da.$$

Sielzint $1/\delta = 4b^2$ o otignìn une sume di tiermins cuadrâts de bande a drete de disavualiance chi sot

$$+\infty > b^2 + \frac{\mathcal{F}^\varepsilon(\psi^\varepsilon)}{\varepsilon^3} \ge \int_\Omega \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{4\,b^2} \left(\frac{\psi^\varepsilon}{\varepsilon^2} \right)^2 da$$

che e impliche la tesi.

Tant che consecuence dal Leme 2 o marchìn che lis derivadis dal potenziâl dai sfuarçs ψ^ε rispiet a x_1 e x_2 a risultin riscjaladis di dôs difarentis potencis di ε, 1 e 2 pe precision.
In gracie de compatece debile di L^2 e W e ven fûr

Leme 3 (Compatece).
Par cualsisei sucession $\{\psi^\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega)$ *che e sodisfi* $\sup_\varepsilon \frac{\mathcal{F}^\varepsilon(\psi^\varepsilon)}{\varepsilon^3} < +\infty$, *e esist une* $\psi \in W$ *e une sot sucession* $\{\psi^\varepsilon\}$, *no tornade a nomenâ, tâl che*

$$\frac{\psi^\varepsilon}{\varepsilon^2} \xrightharpoonup{W} \psi \qquad e \qquad \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_1} \xrightharpoonup{L^2(\Omega)} 0.$$

Dimostrazion. Dal Leme 2 o dedusìn la esistence di une $\psi \in W$ e di une $\xi \in L^2(\Omega)$ tâi che

$$\frac{\psi^\varepsilon}{\varepsilon^2} \xrightarrow{W} \psi \quad \text{e} \quad \frac{\frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_1}}{\varepsilon} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \xi.$$

Ma

$$\int_\Omega \xi\,\eta = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x_1}\eta = -\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \varepsilon \int_\Omega \frac{\psi^\varepsilon}{\varepsilon^2} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = 0 \qquad \forall \eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),$$

e duncje $\xi = 0$.

Pal Leme 2 il funzionâl $\frac{\mathcal{F}^\varepsilon}{\varepsilon^3}$, pensât tant che funzionâl di $\psi^\varepsilon/\varepsilon^2$, al è ecuicoercîf rispiet a la convergjence debile in W e par la Proposizion 8.10 di Dal Maso [3] podìn caraterizâ il Γ-limit in tiermins di sucessions debilmentri convergjentis. Inalore $\frac{\mathcal{F}^\varepsilon(\psi^\varepsilon)}{\varepsilon^3}$ al Γ-converç al funzionâl $\mathcal{F}^0 : W \to \mathbb{R}$ te topologjie debile di W se e dome se $\mathcal{F}''(\psi) \le \mathcal{F}^0(\psi) \le \mathcal{F}'(\psi)$ par cualsisei $\psi \in W$, dulà che

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'(\psi) &:= \Gamma - \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{F}^\varepsilon}{\varepsilon^3}(\psi) \\
&:= \inf \Big\{ \liminf_{\varepsilon_j \to 0} \frac{\mathcal{F}^{\varepsilon_j}}{\varepsilon_j^3}(\psi^{\varepsilon_j}) : \text{ par } \frac{\psi^{\varepsilon_j}}{\varepsilon_j^2} \rightharpoonup \psi \text{ in } W \Big\}, \\
\mathcal{F}''(\psi) &:= \Gamma - \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{F}^\varepsilon}{\varepsilon^3}(\psi) \\
&:= \inf \Big\{ \limsup_{\varepsilon_j \to 0} \frac{\mathcal{F}^{\varepsilon_j}}{\varepsilon_j^3}(\psi^{\varepsilon_j}) : \text{ par } \frac{\psi^{\varepsilon_j}}{\varepsilon_j^2} \rightharpoonup \psi \text{ in } W \Big\}.
\end{aligned}$$

Teoreme 4 (Γ– convergjence)**.** *Al sedi $\mathcal{F}^0 : W \to \mathbb{R}$ cussì definît*

$$\mathcal{F}^0(\psi) := \int_\Omega \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)^2 - 4\psi\, da.$$

Alore $\frac{\mathcal{F}^\varepsilon(\psi^\varepsilon)}{\varepsilon^3}$ al Γ-converç a $\mathcal{F}^0$ te topologjie debile di W.

Dimostrazion. O tachìn provant che $\mathcal{F}^0(\psi) \le \mathcal{F}'(\psi)$ par cualsisei $\psi \in W$. A sedin $\psi \in W$ e $\psi^{\varepsilon_j} \rightharpoonup \psi$ in W. Alore, in gracie de semicontinuitât inferiôr debile de norme di W, o vin

$$\liminf_{\varepsilon_j \longrightarrow 0} \frac{\mathcal{F}^{\varepsilon_j}}{\varepsilon_j^3}(\psi^{\varepsilon_j}) \ge \liminf_{\varepsilon_j \longrightarrow 0} \int_\Omega \left(\frac{1}{\varepsilon_j^2} \frac{\partial \psi^{\varepsilon_j}}{\partial x_2}\right)^2 - 4\,\frac{\psi^{\varepsilon_j}}{\varepsilon_j^2}\, da \ge \mathcal{F}^0(\psi).$$

Par provâ $\mathcal{F}''(\psi) \leq \mathcal{F}^0(\psi)$, assumìn in prin che $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e considerìn la sucession $\psi^{\varepsilon_j} = \varepsilon_j^2\, \psi$. Alore

$$\limsup_{\varepsilon_j \longrightarrow 0} \frac{\mathcal{F}^{\varepsilon_j}}{\varepsilon_j^3}(\psi^{\varepsilon_j}) = \limsup_{\varepsilon_j \longrightarrow 0} \int_\Omega \varepsilon_j^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}^2 - 4\,\psi = \mathcal{F}^0(\psi)$$

Se $\psi \in W \setminus \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, alore a 'nd è une sucession $\{\psi_k\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ che e converç in norme a ψ in W. Stant che, da la ecuazion parsore, $\mathcal{F}''(\psi_k) \leq \mathcal{F}^0(\psi_k)$, la semicontinuitât inferiôr debile di $\mathcal{F}''$ e la continuitât di $\mathcal{F}^0$ rispiet a la convergjence fuart in W a implichìn

$$\mathcal{F}''(\psi) \leq \liminf_{k\to+\infty} \mathcal{F}''(\psi_k) \leq \liminf_{k\to+\infty} \mathcal{F}^0(\psi_k) = \mathcal{F}^0(\psi)$$

e la dimostrazion e je concludude.

4. Convergjence dai minimizadôrs. Ametìn $\varepsilon_j \to 0$. Jessint che $\frac{\mathcal{F}^{\varepsilon_j}}{\varepsilon_j^3}(\psi_m^{\varepsilon_j}) \leq \frac{\mathcal{F}^{\varepsilon_j}}{\varepsilon_j^3}(0) = 0$, pal Leme 2 la sucession $\{\psi_m^{\varepsilon_j}/\varepsilon_j^2\}$ e je ecuilimitade in W. Si che duncje e esist une sot sucession che e converç debilmentri in W a une funzion ψ_m. Pe Γ-convergjence, viôt Dal Maso [3, Corollary 7.17], ψ_m e minimize $\mathcal{F}^0$ e

$$\lim_{\varepsilon_j \longrightarrow 0} \frac{\mathcal{F}^{\varepsilon_j}}{\varepsilon_j^3}(\psi_m^{\varepsilon_j}) = \mathcal{F}^0(\psi_m). \tag{9}$$

Par vie che la funzion limit ψ_m no dipent da la sot sucession sielzude o vin che dute la sucession e converç. Cun di plui, de convessitât strete dai funzionâi $\mathcal{F}^\varepsilon$, o dedusìn la convergjence fuarte dai minimizadôrs.

Teoreme 5. *Cu la notazion parsore, o vin*

$$\frac{\psi_m^\varepsilon}{\varepsilon^2} \to \psi_m, \qquad \text{in } W. \tag{10}$$

Dimostrazion. Cun stimis semplicis o cjatìn,

$$\frac{\mathcal{F}^\varepsilon}{\varepsilon^3}(\psi_m^\varepsilon) \geq \int_\Omega \Big(\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial \psi_m^\varepsilon}{\partial x_2}\Big)^2 - 4\,\frac{\psi_m^\varepsilon}{\varepsilon^2}\, da = \int_\Omega \Big(\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial \psi_m^\varepsilon}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2}\Big)^2 + \\ + 2\frac{\partial \psi_m}{\partial x_2}\Big(\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial \psi_m^\varepsilon}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2}\Big) + \Big(\frac{\partial \psi_m}{\partial x_2}\Big)^2 - 4\,\frac{\psi_m^\varepsilon}{\varepsilon^2}\, da.$$

Lant al limit di dutis dôs lis bandis dal avuâl e doprant (9) o dedusìn

$$0 \geq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \psi_m^{\varepsilon}}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} \right)^2 da.$$

Infin, doprant la disavualiance di Poincaré, o concludìn la dimostrazion.

Se o imponìn la condizion di stazionarietât par $\mathcal{F}^0$, o cjatìn fûr che ψ_m e sodisfe il probleme diferenziâl al contor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = -2, \\ \psi\left(\cdot, -\frac{b}{2}\right) = \psi\left(\cdot, \frac{b}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

che al à par soluzion

$$\psi_m = -\left(x_2^2 - \frac{b^2}{4} \right) \tag{11}$$

Al è interessant rimarcâ che la condizion al contor di Dirichlet sui lâts curts dal retangul ($\psi\left(\pm a/2, \cdot\right) = 0$) no je imponude tal probleme limit. Chest parcè che al mancje il control dai tiermins che a contegnin la derivade dal potenziâl dai sfuarçs $\psi^{\varepsilon}/\varepsilon^2$ rispiet a x_1 tai funzionâi $\frac{\mathcal{F}^{\varepsilon}}{\varepsilon^3}$. Ancje se ψ e je a priori une funzion tant di x_1 che di x_2, la soluzion ψ_m e dipent dome de seconde, confermant cussì la violazion dai vincui al contor in $x_1 = \pm a/2$.

La Figure 2 e mostre trê soluzions scjaladis $\psi_m^{\varepsilon}/\varepsilon^2$ disegnadis tal domini fis di riferiment Ω par valôrs vie vie plui piçui di ε. E je evident la convergjence viers il minimizadôr ψ_m, viôt (11), dal funzionâl limit $\mathcal{F}^0$.

5. Sfuarçs limit. In cheste sezion o derivìn i sfuarçs limit. Par chest fin, o scugnìn prime definî in maniere consistente lis trazions τ_{13}^{ε} e τ_{23}^{ε} tal domini di riferiment Ω leantlis a chês definidis tal domini corint $\tilde{\Omega}_{\varepsilon}$.

La definizion component par component di $\tilde{\tau}_{13}^{\varepsilon}$ e $\tilde{\tau}_{23}^{\varepsilon}$ e je, visantsi di (1), dade di

$$\tilde{\tau}_{13}^{\varepsilon} = \mu\alpha \frac{\partial \tilde{\psi}_m^{\varepsilon}}{\partial \tilde{x}_2}, \qquad \tilde{\tau}_{23}^{\varepsilon} = -\mu\alpha \frac{\partial \tilde{\psi}_m^{\varepsilon}}{\partial \tilde{x}_1}.$$

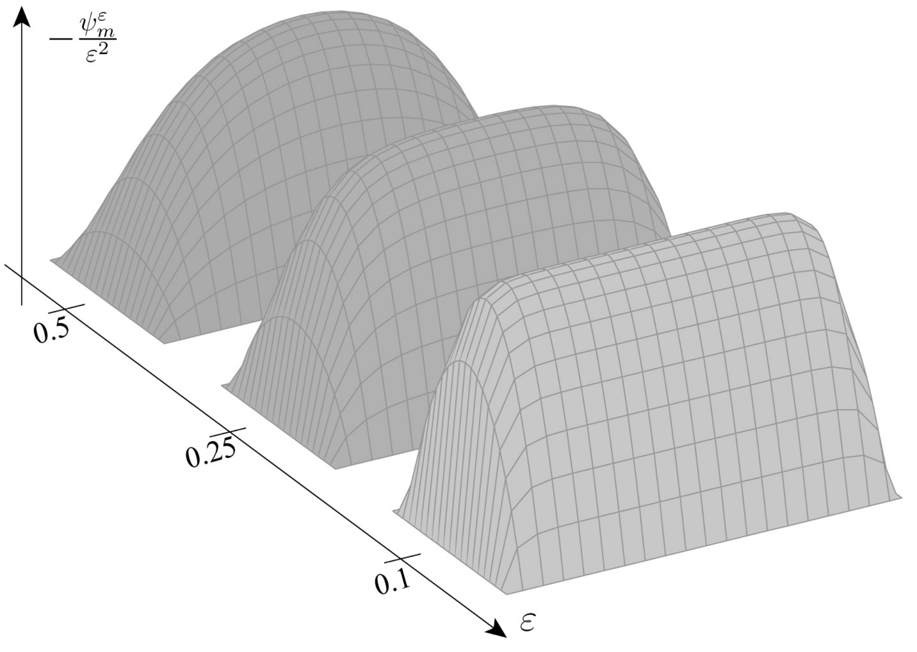

Figure 2. Convergjence dai minimizadôrs.

Operant il cambiament di variabilis (4) e (5) e tignint a ments (10) al è naturâl definî

$$\tau_{13}^\varepsilon := \frac{\tilde{\tau}_{13}^\varepsilon}{\varepsilon} \circ \boldsymbol{\chi}_\varepsilon = \frac{\mu\alpha}{\varepsilon^2}\frac{\partial \psi_m^\varepsilon}{\partial x_2}. \tag{12}$$

Par determinâ il coret riscjalament di τ_{23}^ε si avalìn de ecuazion di ecuilibri, scrite in forme debile, e aplichìn un cambiament di variabilis cjatant

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} \tilde{\tau}_{13}^\varepsilon \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}_1} + \tilde{\tau}_{23}^\varepsilon \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}_2}\, d\tilde{a} \\ &= \int_\Omega (\tilde{\tau}_{13}^\varepsilon \circ \boldsymbol{\chi}_\varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\tilde{\tau}_{23}^\varepsilon}{\varepsilon} \circ \boldsymbol{\chi}_\varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial x_2})\, \varepsilon\, da\,, \quad \forall\, \eta \in H^1(\Omega)\,, \end{aligned}$$

dulà che la relazion jenfri $\tilde{\eta}$ e η e je furnide di (5). Alore, tignint cont di (12), o definìn

$$\tau_{23}^\varepsilon := \frac{\tilde{\tau}_{23}^\varepsilon}{\varepsilon^2} \circ \boldsymbol{\chi}_\varepsilon = -\frac{\mu\alpha}{\varepsilon^2}\frac{\partial \psi_m^\varepsilon}{\partial x_1}$$

Come bielzà sucedût tal Leme 2, o osservìn che lis components di sfuarç a riscjalin cun difarentis potencis di ε passant dal domini corint a chel di riferiment. Chest fat al è previodût parcè che dome un dai lâts dal domini retangolâr al à il spessôr che al ven ridusût fintremai a zero.

O scrusignìn cumò i limits dai sfuarçs τ_{13}^{ε} and τ_{23}^{ε}.

Il limit di τ_{13}^{ε} al ven fûr daurman di (10). Cun di fat o vin

$$\tau_{13}^{\varepsilon} = \mu\alpha \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \psi_m^{\varepsilon}}{\partial x_2} \to \mu\alpha \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} =: \tau_{13} \quad \text{in } W.$$

La espression dal potenziâl ψ_m ripuartade in (11) e furnìs

$$\tau_{13} = -2\mu\alpha\, x_2, \quad \text{in } \Omega. \tag{13}$$

Il câs di τ_{23}^{ε} al è un tic plui ingredeât par vie che la esistence di un limit no je sigurade dal teoreme di Γ-convergjence. Denotìn duncje cun

$$H^* := H^1((-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}); L^2(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}))^*$$

il spazi duâl di

$$H := H^1((-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}); L^2(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2})).$$

Alore

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \psi_m^{\varepsilon}}{\partial x_1} \right\|_{H^*} = \sup_{\eta \in H} \frac{\int_{\Omega} \psi_m^{\varepsilon} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{1}{\varepsilon^2}\, da}{\|\eta\|_H} \leq \left\| \frac{\psi_m^{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right\|_{L^2(\Omega)} < +\infty\,.$$

Partant da la limitazion parsore e ven fûr che e esist une sot sucession di $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \psi_m^{\varepsilon}}{\partial x_1}$ debilmentri convergjent in H^*. In efiets doprant il fat che $\psi_m^{\varepsilon}/\varepsilon^2$ e converç in $L^2(\Omega)$, si dedûs che $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \psi_m^{\varepsilon}}{\partial x_1}$ e je une sucession di Cauchy in H^* e che duncje e converç in norme.

Indichìn cun $\mathcal{H}^1$ la misure di Hausdorff di dimension un, e cun

$$B_a^+ := \left\{\tfrac{a}{2}\right\} \times \left(-\tfrac{b}{2}, \tfrac{b}{2}\right), \qquad B_a^- := \left\{-\tfrac{a}{2}\right\} \times \left(-\tfrac{b}{2}, \tfrac{b}{2}\right),$$

i lâts terminâi dal retangul in direzion x_1. O contindìn che

$$\tau_{23}^{\varepsilon} \to \tau_{23} \quad \text{in } H^*, \tag{14}$$

dulà che

$$\tau_{23} := \mu\,\alpha\,\psi_m\,\left(\mathcal{H}^1\llcorner B_a^+ - \mathcal{H}^1\llcorner B_a^-\right), \tag{15}$$

al è l'element di H^* definît di

$$\langle \tau_{23}, \eta\rangle = \mu\alpha \int_{-b/2}^{b/2} \psi_m\,\left[\eta\left(\tfrac{a}{2}, x_2\right) - \eta\left(-\tfrac{a}{2}, x_2\right)\right]\,dx_2, \quad \forall \eta \in H.$$

In efiets o vin

$$\mu\alpha \sup_{\eta\in H} \frac{\int_\Omega \psi_m^\varepsilon \frac{\partial\eta}{\partial x_1}\frac{1}{\varepsilon^2}\,da - \int_{-b/2}^{b/2}\psi_m\,\left[\eta\left(\tfrac{a}{2}, x_2\right) - \eta\left(-\tfrac{a}{2}, x_2\right)\right]\,dx_2}{\|\eta\|_H} =$$

$$= \mu\alpha \sup_{\eta\in H} \frac{\int_\Omega \left(\frac{\psi_m^\varepsilon}{\varepsilon^2} - \psi_m\right)\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\,da}{\|\eta\|_H} = \|\tau_{23}^\varepsilon - \tau_{23}\|_{H^*} \le \left\|\frac{\psi_m^\varepsilon}{\varepsilon^2} - \psi_m\right\|_{L^2(\Omega)},$$

di indulà che o rivìn a la afermazion (14).

Il cjamp dai sfuarçs limit cemût che al risulte des (13) e (15) al è ilustrât in maniere schematiche in Figure 3 I sfuarçs τ_{13} a àn une distribuzion liniâr tal spessôr e uniforme dilunc de linie mezane $x_2 = 0$ dal retangul; τ_{23} invezit e je une misure che e à par supuart i lâts curts $x_1 = \pm a/2$ dulà che e à distribuzion paraboliche.

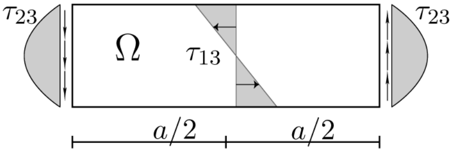

Figure 3. Distribuzion limit des trazions.

6. Moment stuarzint e rigjidece torsionâl. Il moment stuarzint aplicât $\tilde{M}^\varepsilon$ al pues jessi calcolât doprant une des dôs formulis chi sot

$$\tilde{M}^\varepsilon = \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} \tilde{x}_1\,\tilde{\tau}_{23}^\varepsilon - \tilde{x}_2\,\tilde{\tau}_{13}^\varepsilon\,d\tilde{a} = 2\,\mu\,\alpha\,\int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} \tilde{\psi}_m^\varepsilon\,da.$$

Clamìn $M^\varepsilon := \frac{\tilde{M}^\varepsilon}{\varepsilon^3}$ il moment riscjalât, e lu esprimìn cussì:

$$M^\varepsilon := \frac{\tilde{M}^\varepsilon}{\varepsilon^3} = \int_\Omega x_1\,\tau_{23}^\varepsilon - x_2\,\tau_{13}^\varepsilon\,da = 2\,\mu\,\alpha\,\int_\Omega \frac{\psi_m^\varepsilon}{\varepsilon^2}\,da.$$

Midiant dai risultâts di convergjence burîts fûr tes sezions precedentis o cjatìn che M^ε al converç a un moment M che lu podìn scrivi tant che

$$M = 2\,\mu\,\alpha\,\int_\Omega \psi_m\,da = \mu\,\alpha\,\frac{a\,b^3}{3},$$

o ben tant che

$$M = \langle \tau_{23}, x_1 \rangle - \int_\Omega x_2\,\tau_{13}\,da, \tag{16}$$

dulà che i doi contribûts de bande a drete dal avuâl in (16) a son dâts di

$$\langle \tau_{23}, x_1 \rangle = \mu\,\alpha\,\int_{-b/2}^{b/2} \psi_m\,dx_2 \left(\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)\right) = \mu\,\alpha\,\frac{a\,b^3}{6}$$
$$-\int_\Omega x_2\,\tau_{13}\,da = 2\,\mu\,\alpha\,\int_\Omega x_2^2 da = \mu\,\alpha\,\frac{a\,b^3}{6}.$$

Si cjate infin che ognidune des componentis di sfuarç e puarte metât de rigjidece torsionâl totâl; in particolâr al ven fûr che il contribût di τ_{23} al è chel di une cubie di fuarcis $F = \mu\,\alpha\,\int_{-b/2}^{b/2} \psi_m\,dx_2$ aplicadis sui lâts curts dal domini retangolâr.