Gjornâl Furlan des Siencis **2.** 2002, 113-127

L'Orculat intal 'Lusôr di Lune'

SERGIO CECOTTI*

Struc *O passìn in rassegne une serie di straordenariis 'coincidencis' matematichis cognossudis tant che 'Lusôr di Lune'. Si trate di identitâts magjichis cun impuartantis implicazions in ducj i setôrs plui astrats de matematiche e cuntune profonde interpretazion in fisiche teoriche.*

Peraulis clâf: Grops finîts sporadics, grop orculat, formis e curvis modulârs, *hauptmodui,* seriis di McKay–Thompson.

No, chest viaç la stamparie no à fat nissun erôr. No tu stâs leint une conte di scatûr su lis gjatis–marangulis che, par fal, e je stade rilegade adun cui articui sientifics tal GFS. Tu stâs leint un articul di rassegne suntune serie di brilants disvilups in matematiche (cun impuartantis implicazions pe fisiche teoriche); risultâts che pe lôr impuartance a àn frutât a Richard Borcherds [1] la Medaie Fields: l'ecuivalent dal Nobel pe matematiche. Si trate di risultâts straordenariis, identitâts 'magjichis', teoremis insumiâts che a metin in contat parts diviersis de matematiche (e de fisiche) tacant di teoriis classichis — come lis funzions elitichis — par rivâ ai aspiets plui 'esoterics' de matematiche moderne: la classificazion dai grops finîts, la teorie des curvis e des formis modulârs, lis algjebris di Lie infinidis, e vie indenant.

L'Orculat intal Lusôr di Lune al è un titul tecnic, lafé poetic. Une cierte struture matematiche naturâl, che o presentìn sot vie, par inglês e ven clamade *the*

* SISSA, Triest, cecottis@estelnet.it

L'Orculat intal Lusôr di Lune al è un titul tecnic, lafé poetic. Une cierte struture matematiche naturâl, che o presentìn sot vie, par inglês e ven clamade *the*

Il non *Lusôr di Lune* al sta a significâ doi diviers aspiets de situazion. Di une bande al motive il sens di *magjiche usme* che e emane de idee che obiets une vore distants intal mont de matematiche a sedin, in realtât, ecuivalents; e je come la sensazion di un rai di lûs che al lassi barlumâ alc di striât tal scurôr di un paisaç matematic fat di teoriis masse intricadis par jessi comprendudis. Di chê altre bande, par inglês *Moonshine* al vûl ancje dî 'sgnape distilade di scuindon' — intal scûr de gnot — par freâ la finance e no paiâ il dazi [2]. I prins matematics che a àn saborât ator chescj striaments a verin l'impression che il lôr lavôr al ves plui parintât cul cuintribant che cu la matematiche 'oneste'. Ancje par chel il non *Lusôr di Lune* al cjapà pît.

1. L'Orculat

Une des struturis algjebrichis plui impuartantis e universâls e je chê di *grop* [3]. Un grop G si dîs *finît* se il so ordin (= il numar dai siei elements), $|G|$, al è finît. Si cognossin une vore di esemplis di grops finîts: metipen il grop ciclic $\mathbb{Z}_n$, il grop simetric S_n (il grop des permutazions di n obiets), i grops cristalografics (lis simetriis di un cristal regolâr), e vie indenant. Un grop finît G al à un numar finît $m(G)$ di rapresentazions iriducibilis inecuivalentis[1], R_i; in fats $m(G)$ al è il numar des classis di coniugazion di G. Lis dimensions di chestis rapresentazions a àn la proprietât [3]

$$\sum_{k=1}^{m(G)} (\dim R_k)^2 = |G|. \tag{1.1}$$

Al è naturâl domandâsi se, oltri ai esemplis cognossûts, a esistin altris grops finîts. In tiermins astrats, il problem al è chel di classificâ ducj i pussibii grops finîts a mancul di isomorfisim. Al baste classificâ i grops finîts *sempliçs*. (Un grop G al è *sempliç* se nol à un sotgrop normâl[2] $N \subset G$, cun $N \neq \{1\}$). In efiets il teoreme di Jordan–Hölder [3] al garantìs che ducj i grops a puedin jessi costruîts come prodots semi–direts di grops sempliçs.

Il problem di classificâ i grops finîts sempliçs al podarès someâ facil; impen al è un dai plui grivis problems di dute la matematiche. Al è stât completementri risolt, ma la dimostrazion dal teoreme [4] e je lungje cualchi robe come 15.000

pagjinis! Dut câs la liste complete dai grops finîts semplics e je:

a) I grops ciclics $\mathbb{Z}_p$ cun p prin;
b) I grops alternants $\mathcal{A}_n$ cun $n \geq 5$ (il grop alternant $\mathcal{A}_n$ al è il grop des permutazions pârs di n obiets, *a.v.s.* $\mathcal{A}_n = \mathcal{S}_n/\mathbb{Z}_2$);
c) 16 fameis infinidis di grops di tip Lie (essenziâlmentri grops di matricis sui cjamps finîts $\mathbb{F}_q$; l'esempli plui sempliç al è $PSL_n(\mathbb{F}_q)$);
d) 26 altris grops 'isolâts' clamâts grops *sporadics*.

I grops sporadics a son pardabon fûr dal normâl. Come ducj i obiets 'ecezionâi', la lôr esistence (e coerence) e je il risultât di un meracul inrepetibil. Il meracul al è cetant plui magjic cetant plui grant al è l'ordin dal grop. Il plui piçul grop sporadic, il grop di Mathieu M_{11}, al à ordin 7920. Al fo discuviert intal an 1861. Il plui grant, clamât *l'Orculat* $\mathbb{M}$, al fo cjatât di Fisher e Griess tai agns 1973–1980 [5]. Il so ordin al è

$$\begin{aligned} |\mathbb{M}| &= 808017424794512875886459904961710757005754368000000000 \\ &= 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \qquad (1.2) \\ &\approx 0.8 \times 10^{54}. \end{aligned}$$

Te seconde linie o vin ripuartade la decomposizion di $|\mathbb{M}|$ in fatôrs prins par vie che — daûr il teoreme di Sylow [3] — cheste decomposion nus permet di dî alc sui sotgrops di $\mathbb{M}$. In particolâr, 20 dai 26 grops finîts sporadics a imparin tant che sotgrops dal Orculat $\mathbb{M}$. La liste dai prins presinte inte decomposizion dal ordin dal Orculat

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 41, 47, 59, 71\} \qquad (1.3)$$

e à un'altre interpretazion in matematiche che o discutarìn te §.3.1. Il numar des classis di coniugazion $m(\mathbb{M}) = 194$. Duncje l'Orculat al à 194 rapresentazions irriducibilis inecuivalentis. Lis dimensions des rapresentazions irriducibilis plui piçulis a son:

$$\begin{aligned} &\dim R_0 = 1, \quad \dim R_1 = 196\,883, \quad \dim R_2 = 21\,296\,876, \\ &\dim R_3 = 842\,609\,326, \quad \cdots\cdots \end{aligned} \qquad (1.4)$$

numars che a cualchidun no disin nuie, ma che par McKay a forin une vere iluminazion. Parcè che ju veve za viodûts in altrò...

2. L'invariant modulâr $j(\tau)$ e i *Hauptmodui*

2.1. Lis funzions modulârs

Il semi–plan superiôr complès, $\mathcal{H} \equiv \{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$, indotât de metriche iperboliche di Poincarè

$$ds^2 = \frac{d\bar{z}dz}{(\operatorname{Im} z)^2} \tag{2.1}$$

al è un model de gjeometrie non–Euclidee di Lobačevski. (Ducj i postulâts di Euclit a son sodisfats, ecet che par un pont fûr di une rete[3] a passin infinidis retis paralelis e rete dade). $\mathcal{H}$ cu la metriche (2.1) al è un spazi metric complet (duncje no si pues slargjâlu). Il grop des isometriis di $\mathcal{H}$ al è $SL(2, \mathbf{R})$. Un element

$$\begin{gathered} g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R}) \\ a, b, c, d \in \mathbf{R} \quad \text{cun } ad - bc = 1, \end{gathered} \tag{2.2}$$

al agjìs su $\mathcal{H}$ mediant la transformazion di Möbius

$$z \mapsto z' = g(z) \equiv \frac{az + b}{cz + d}. \tag{2.3}$$

Al è facil viodi che (2.3) e je une isometrie pe metriche (2.1). O podìn considerâ il sotgrop discret $SL(2, \mathbf{Z})$, *a.v.s.* il sotgrop di $SL(2, \mathbf{R})$ des matricis in (2.2) cun $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. $SL(2, \mathbf{Z})$ al è clamât *grop modulâr.* Chest grop al è gjenerât di dôs transformazions[4] T e S

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Confrontant cun (2.3), o vin

$$T \colon z \mapsto z + 1, \qquad S \colon z \mapsto -1/z. \tag{2.5}$$

Une *funzion modulâr (di pês zero[5])* e je une funzion meromorfe[6] $f \colon \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ invariant pe azion di $SL(2, \mathbf{Z})$, *a.v.s.* cu la proprietât [6]

$$f(z) = f\big(g(z)\big) \equiv f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \quad \text{par ducj i } \; g \in SL(2, \mathbf{Z}). \tag{2.6}$$

Daûr (2.5), une funzion modulâr e à lis dôs proprietâts $f(z + 1) = f(z)$ *(period-*

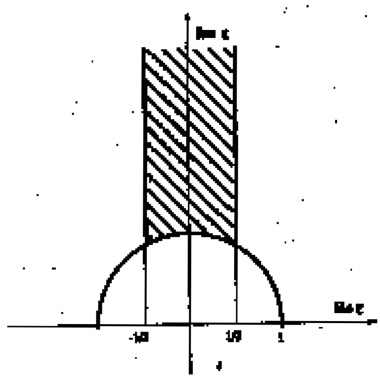
icitât) e $f(-1/z) = f(z)$ *(inversion)*. Jessint periodiche, une funzion modulâr e à une rapresentazion in serie di Fourier

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, q^n, \quad \text{dulà che} \quad q = e^{2\pi i z}. \tag{2.7}$$

q e je une buine coordenade complesse ator dal pont $z = i\infty$, *a.v.s.* $q = 0$. Duncje la funzion in (2.7) e je *meromorfe* (risp. *olomorfe)* tal pont al infinît $i\infty$ se $a_n = 0$ par n avonde piçul (resp. par $n < 0$).

Lis funzions modulârs a puedin jessi viodudis intune altre maniere. Identificant i ponts in $\mathcal{H}$ che a diferissin pe azion di $SL(2,\mathbb{Z})$ si oten un spazi $\mathcal{H}/SL(2,\mathbb{Z})$ — *il spazi des orbitis di* $SL(2,\mathbb{Z})$ *in* $\mathcal{H}$. Une funzion modulâr e je, semplicementri, une funzion meromorfe in chest spazi cuozient.

Studiin un pôc miôr la gjeometrie di $\mathcal{H}/SL(2,\mathbb{Z})$. Doprant plui voltis T, o viodìn che ogni pont di $\mathcal{H}$ al pues jessi identificât cuntun pont inte striche verticâl $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}$; in fats cuntun *unic* pont de striche, ecet pai ponts sul ôr de striche. Daûr (2.5), S e je l'inversion rispiet al cercli unitari, e duncje ogni pont in $\mathcal{H}$ al è ecuivalent a un pont cun $|z| \geq 1$. Par consecuence, o podìn limitâsi a considerâ i ponts inte striche verticâl che a son a distance almancul 1 de origjin. La regjon risultante $\mathcal{R} \subset \mathcal{H}$ e je clamade *une regjon fondamentâl pal grop* $SL(2,\mathbb{Z})$. La regjon $\mathcal{R}$ e je trategjade te figure. Ecet pe frontiere di $\mathcal{R}$, ogni orbite di $SL(2,\mathbb{Z})$ e interseche $\mathcal{R}$ *intun e nome intun* pont [6].



Par otignî il spazi $\mathcal{H}/SL(2,\mathbb{Z})$ al reste di identificâ i ponts corispuindents su la frontiere di $\mathcal{R}$. L'ôr $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ al è mapât di T intal ôr $\mathrm{Re}(z) = +\frac{1}{2}$, duncje o vin di identificâ (= incolâ adun) chescj doi ôrs. Il risultât al è un cilindri che al va al infinît, cuntun strani 'lavri' da pît. La transformazion S nus dîs cemût che o vin di sierâ chest 'lavri': identificant $ie^{i\theta}$ cun $ie^{-i\theta}$. Chest al stagne il font dal cilindri; par consecuence o otignìn une sorte di 'tace' infinitementri lungje cuntune base increspade in mût strani. Zontant il pont $i\infty$, o sierìn la 'tace' ancje in alt. Il risultât (in tiermins topologjics) al è une *sfere*. No someарès une sfere slisse, pi di mancul *e je* slisse (in dimension ≤ 3 une varietât topologjiche e à une uniche struture diferenziâl compatibile).

Duncje $\mathcal{H}/SL(2,\mathbb{Z})$ e je une sfere[7]. Un risultât fondamentâl de teorie des superficiis di Riemann al dîs che, *in sens biolomorphic, dutis lis sferis a son ecuivalentis*. Par consecuence e scuen esisti une funzion olomorfe un–a–un

$$J\colon\ \mathcal{H}/SL(2,\mathbb{Z}) \to \mathbf{C}\cup\infty\ \equiv\ \text{sfere di Riemann.} \tag{2.8}$$

$J(z)$ e je la funzion che e realize il gambiament di coordenade $z \mapsto w = J(z)$ che al fâs passâ la sfere de 'strane' rapresentazion $\mathcal{H}/SL(2,\mathbb{Z})$ a la forme 'canoniche' (il plan complès plui il pont al infinît). Lis funzions meromorfis su la sfere 'canoniche' a son juste lis funzions *razionâls, a.v.s.* de forme $f(w) = P(w)/Q(w)$, cun $P(w), Q(w)$ polinomis. Par tant lis funzions meromorfis su $\mathcal{H}/SL(2,\mathbb{Z})$ a son juste chês de forme

$$f(z) = \frac{P(J(z))}{Q(J(z))}. \tag{2.9}$$

In efiets (2.8) no definìs $J(z)$ in maniere uniche. L'azion dal grop $SL(2,\mathbf{C})$, dât des transformazions di Möbius $w \mapsto (aw+b)/(cw+d)$ (chest viaç cun a, b, c, d numars *complès!)*, al lasse invariade la sfere di Riemann; si che $J(z)$ e je definide a mancul di une transformazion di Möbius. Cheste ambiguitât e pues jessi fissade domandant che l'unic poli al sei tal pont al infinît $q \equiv e^{2\pi iz} = 0$ e che il relatîf residui al sedi normalizât a 1. E reste nome l'ambiguitât rispiet a l'adizion di une constant $J(z) \to J(z) + \text{const}$. Cheste ambiguitât e pues jessi eliminade domandant che il tiermin constant inte rapresentazion di Fourier (2.7) al sedi zero. Duncje $J(z)$ e je unichementri determinade de proprietât (2.8) e de condizion che la serie e vebi la forme 'canoniche'

$$J(z) = q^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, q^n, \tag{2.10}$$

par cierts numars c_n. In efiets za 150 agns Jacobi al considerà une forme un pôc diferente di cheste funzion, *a.v.s.* $j(z) = J(z) + 744$, che e à il merit di jessi esprimude in tiermins di funzions ben cognossudis, la funzion $\eta(z)$ di Dedekind e $\Theta_{E_8}(z)$ — la funzion Theta dal reticul des lidrîs di[8] E_8 —

$$\begin{aligned} \eta(z) &= q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \\ \Theta_{E_8}(z) &= 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n \quad \text{dulà che } \sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3. \end{aligned} \tag{2.11}$$

L'espression esplicite e je

$$\begin{aligned} j(z) &= \frac{\left(\Theta_{E_8}(z)\right)^3}{\eta(z)^{24}} \\ &= q^{-1} + 744 + 196\,884\, q + 21\,493\,760\, q^2 + 864\,299\,970\, q^3 + \cdots \end{aligned} \tag{2.12}$$

In particolâr ducj i coeficients c_n a son numars intîrs positîfs (un fat a so mût magjic).

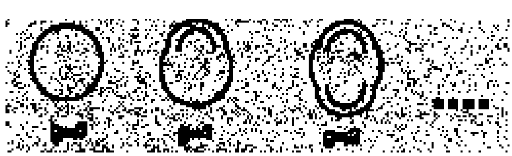
2.2. Gjeneralizazion: i Hauptmodui pai grops Γ

La construzion de §.2.1 e pues jessi gjeneralizade. Considerìn un sotgrop $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{R})$ che al conten un sotgrop de forme

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \pmod{N} \right\}, \tag{2.13}$$

e tâl che $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ al implichi $t \in \mathbb{Z}$, *a.v.s.* lis translazions in Γ a son interiis.

Une funzion $f \colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ e je clamade *funzion modulâr pal grop* Γ se e je meromorfe (ancje al infinît) e se e je invariante rispiet a lis transformazions di Mobiüs dal grop Γ. In particolâr f e je periodiche e duncje e à une espression in serie di Fourier (o Laurent) come in (2.7). Ripetint l'analisi denant trat, o considerìn il spazi des orbitis $\Sigma_\Gamma = \overline{\mathcal{H}}/\Gamma$. Lis nestris condizions sul grop Γ a garantissin che Σ_Γ e sei une superficie di Riemann compate. Topologjichementri la superificie Σ_Γ e je classificade di un unic invariant *il gjenar* g. (Une superficie di gjenar g e je juste une sfere cun tacadis g mantiis, viôt la figure).



Il gjenar g di Σ_Γ al dipent dal grop Γ. Par esempli, se $\Gamma = \Gamma_0(N)$, $g = 0$ par $1 \leq N \leq 10$ e par $N = 12, 13, 16, 18, 25$; $g = 1$ par $N = 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 27, 32, 36, 49$, e *v.i.*. Nô o sin interessâts al câs di gjenar 0, *a.v.s.* Σ_Γ e je une sfere. In cheste situazion e scuen esisti une funzion modulâr par Γ, $J_\Gamma(z)$ che e realize il gambiament di coordenade $z \mapsto w$, (w e je la coordenade 'standard' de sfere). Ancjemò un viaç, J_Γ e pues jessi sielzude inte forme

$$J_\Gamma(z) = q^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\Gamma)\, q^n, \tag{2.14}$$

cun cheste condizion $J_\Gamma(z)$ e je uniche. Lis funzions meromorfis su Σ_Γ a son de forme $P(J_\Gamma(z))/Q(J_\Gamma(z))$, cun P, Q polinomis.

La funzion $J_\Gamma(z)$ e je clamade *Hauptmodul pal grop* Γ. Par esempli, pai trê grops $\Gamma_0(2)$, $\Gamma_0(13)$ e $\Gamma_0(25)$ o vin

$$\begin{aligned} J_2(z) &= q^{-1} + 276q - 2048q^2 + 11202q^3 - 49152q^4 + 184024q^5 + \cdots \\ J_{13}(z) &= q^{-1} - q + 2q^2 + q^3 + 2q^4 - 2q^5 - 2q^7 - 2q^8 + q^9 + \cdots \\ J_{25}(z) &= q^{-1} - q + q^4 + q^6 - q^{11} - q^{14} + q^{21} + \cdots \end{aligned} \tag{2.15}$$

2.3. Relazion cui modui dai tors

Al sei $\Lambda = [\omega_1, \omega_2]$ un reticul in $\mathbb{C}$ cun base ω_1, ω_2 sui intîrs. Λ al è un grop Abelian gjenerât di ω_1 e ω_2 che a son linearmentri indipendents sui reâi. Cence pierdi gjeneralitât, o podìn sielzi $\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_2)$ positîf, *a.v.s.* il numar complès $\tau \equiv \omega_1/\omega_2 \in \mathcal{H}$, il semi–plan superiôr. Il numar complès τ (clamât *modul)* al è invariant rispiet a une omotopie dal reticul $[\omega_1, \omega_2] \mapsto [\lambda\omega_1, \lambda\omega_2]$. Il reticul gjenerât di $[\omega_1', \omega_2']$ al è il stes di chel gjenerât di $[\omega_1, \omega_2]$ *se e nome se* lis dôs basis a son leadis di une transformazion $SL(2, \mathbb{Z})$

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Un tor al è une superficie di gjenar 1, une sfere cuntune mantie (la forme di un colaç). Il teoreme di uniformizazion nus dîs che un tor al è simpri (olomorfichementri) ecuivalent a $\mathbb{C}/\Lambda$, par un cualchi reticul Λ. [$\mathbb{C}/\Lambda$ al è il spazi che si oten identificant doi ponts z e z' dal plan complès cuant che la lôr diference e je un element dal reticul, $z = z' + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, cun $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$]. I reticui Λ e $\lambda\Lambda$

a corispuindin a tors ecuivalents pal gambiament di coordenade $z \mapsto \lambda z$. Duncje la classe di ecuivalence dal tor e dipint nome dal modul τ e no dai doi numars ω_1, ω_2 separatementri. Ma il tor al dipint nome dal reticul Λ e no de particolâr base doprade. Par consecuence dôs basis leadis di une transformazion $SL(2, \mathbb{Z})$ come te ec.(2.16) a corispuindin al stes tor. Chest al vûl dî che doi modui τ e τ' leâts di une transformazion di Möbius

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

a rapresentin il stes tor. Stant che $J: \mathcal{H}/SL(2, \mathbb{Z}) \to \mathbb{C} \cup \infty$ e je une mape un–a–un, o vin che doi tors $\mathbb{C}/[\omega_1, \omega_2]$ e $\mathbb{C}/[\omega_1', \omega_2']$ a son ecuivalents *se e nome se*

$$j(\omega_1/\omega_2) = j(\omega_1'/\omega_2'), \tag{2.17}$$

a.v.s. la funzion $j(\tau)$ e je *l'unic invariant che al classifiche lis diviersis classis di isomorfisim dai tors.* [I altris grops modulârs in §.2.2 a rapresentin la classificazion di tors plui altris struturis parsore vie; par esempli $\mathcal{H}/\Gamma_0(N)$ al parametrize lis classis di isomorfisim dai tors plui un grop $\mathbb{Z}_N$ di siei ponts].

Par fâ contat cu la fisiche, o considerìn une teorie di cjamp basade su di un tor $\mathbb{C}/\Lambda$. Si limitìn a lis teoriis conformis, *a.v.s.* invariantis rispiet a un mudament di scjale de coordenade $z \mapsto \lambda z$. La tipiche teorie di chest tip al è un cjamp scjalâr ϕ di masse zero che che al vîf suntun tor Euclidean. Il model al è definît de azion

$$S = \frac{1}{4\pi} \int \bar{\partial}\phi \, \partial\phi \, d^2 z. \tag{2.18}$$

La sô funzion di partizion

$$Z[\Lambda] = \int [d\phi] \exp[-S] \tag{2.19}$$

e je une funzion nome dal reticul Λ, duncje — in tiermins di τ — e à di jessi un invariant modulâr[9]. Si pues mistrâ che

$$Z[\Lambda] = \frac{1}{(\mathrm{Im}\,\tau)^{1/2} \, \eta(\tau) \, \eta(\bar{\tau})}, \tag{2.20}$$

là che $\eta(\tau)$ e je la funzion di Dedekind definide te ec.(2.11). L'invariance modulâr di cheste espression e domande che

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (\text{fase}) \, (c\tau + d)^{1/2} \, \eta(\tau), \tag{2.21}$$

che e je la ben cognossude ecuazion funzionâl di $\eta(\tau)$ [in particolâr, $\eta(\tau)^{24}$ e je une buine funzion modulâr di pês 12].

Tal stes mût, o podìn construî une teorie fisiche, invariante conforme, cu la proprietât che se le cuantizìn sul tor, la sô funzion di partizion e je juste apont $j(\tau)$. La proprietât di localitât de teorie fisiche e 'spieghe' la proprietât di invariance modulâr de funzion $j(\tau)$.

3. Il Lusôr di Lune

A priori la funzion modulâr $j(z)$ — e, plui in gjenerâl i *Hauptmodui* $J_\Gamma(z)$ — no a àn nuie ce fâ cu la teorie dai grops finîts sporadics. A son juste dôs diviersis branchis esotichis de matematiche che a descrivin doi obiets esoterics *diferents*. Imagjinait la sorprese di McKay e Thompson cuant che a scuvierzerin che chesçj doi obiets a son daonzûts in maniere profonde, cuasi dôs musis di une stesse medaie. Sul prin no si capive ce che un grop finît al pues vê ce fâ cu lis funzions modulârs; lis straordenariis coincidencis jenfri lis teoriis a parevin come piçulis tessaris di un grant mosaic che la pocje lûs de lune no rive a fâ calumâ tal scûr de gnot. Vuê, par merit di Borcherds e altris o cognossìn il parcè di chestis 'coincidencis'. In ultime analisi l'esplicazion e sta inte significance fisiche di chesçj obiets: al esist un sisteme fisic (une teorie di stringhe) che al pues jessi viodût tant che l'obiet *plui naturâl* invariant pal Orculat M (e ancje la vere reson pe cuâl l'Orculat *al scuen esisti)*. Chest particolâr model di stringhe e à par funzion di partizion juste la funzion $J(\tau)$, o ben un altri Hauptmodul $J_\Gamma(\tau)$ (a secont des condizions di periodicitât sul tor). Viodìn cumò in detai chestis 'stranis' coincidencis.

3.1. Grop modulârs di gjenar zero

Cemût che o vin viodût inte §.2.2, i Hauptmodui a esistin nome se la corispuindente curve modulâr $\overline{\mathcal{H}}/\Gamma$ e à gjenar zero. Se l'Orculat M al è leât in cualchi maniere ai Hauptmodui, al scuen cognossi cuâi subgrops discrets di $SL(2,\mathbb{R})$ a son di gjenar zero e cuâi no.

Tal 1975 Andrew Ogg al studià il

Problem. *Par cuâi numars prins p il grop $\Gamma_0(p)+$ [$\equiv$ il grop normalizadôr*[10] *di $\Gamma_0(p)$ in $SL(2,\mathbb{R})$] al à gjenar zero.*

La rispueste e je sugjestive dal fat che l'Orculat al ricognòs lis sferis:

Rispueste. *Il grop $\Gamma_0(p)+$ al à gjenar 0 <u>se e nome se</u> il prin p al comparìs inte decomposizion dal ordin dal Orculat (1.3)!!*

3.2. I coeficients di $J_\Gamma(z)$

O vin incuintradis dôs peculiârs secuencis di numars intîrs: la liste des dimensions des rapresentazions inriducibilis dal Orculat, ec.(1.4), e chê dai coeficients di Fourier de funzion $J(z) = q^{-1} + \sum_n c_n q^n$, ec.(2.12). *A priori* chescj numars no àn nuie ce fâ. Ma McKay tal 1978 al notà che i numars a son imparintâts:

$$\begin{aligned} c_1 &= 196\ 884 = 196\ 883 + 1 \\ c_2 &= 21\ 493\ 760 = 21\ 296\ 876 + 196\ 883 + 1 \\ c_3 &= 864\ 299\ 970 = 842\ 609\ 326 + 21\ 296\ 876 + 2 \cdot 196\ 883 + 2 \cdot 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Spiegâ chestis coincidencis al è il problem che o clamìn *Lusôr di Lune.* De ec.(3.1) o viodìn che i coeficients de funzion $J(z)$ a son combinazions liniârs, cun coeficients intîrs sempliçs, des dimensions des rapresentazions inriducibilis dal Orculat M. Viodint la grandece dai numars coinvolts, lis avualitâts (3.1) no puedin jessi 'casuâls': a scugnin vê une esplicazion profonde.

Par spiegâ il misteri, McKay al congeturà l'esistence di une rapresentazion *graduade* $V^\natural$ dal Orculat

$$\begin{aligned} V^\natural = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n = V_{-1} \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus \cdots \\ \text{cu la proprietât} \quad \dim(V_n) = c_n. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Lis avualitâts (3.1) a corispuindin a la decomposizion des rapresentazions V_n in tiermins di rapresentazions inriducibilis, *a.v.s.* $V_{-1} = R_0$, $V_1 = R_1 \oplus R_0$, $V_2 = R_2 \oplus R_1 \oplus R_0$, $V_3 = R_3 \oplus R_2 \oplus R_1 \oplus R_1 \oplus R_0 \oplus R_0$, *e vie indenant.* Duncje

$$J(z) = j(z) - 744 = \dim_q(V) \equiv \dim(V_{-1})q^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \dim(V_k)q^k, \tag{3.3}$$

là che il simbul $\dim_q(W)$ al sta pe *dimension graduade* de rapresentazion W. Se la situazion e je cheste, o podìn considerâ *il caratar* de rapresentazion $V^\natural$. Il caratar di $V^\natural$, calcolât su l'element $g \in$ M, al è

$$T_g(z) = \mathrm{Tr}_q(g\big|_{V^\natural} \equiv \mathrm{tr}(g\big|_{V_{-1}}) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{tr}(g\big|_{V_k})\, q^k. \tag{3.4}$$

Lis funzions $T_g(z)$ a son clamadis *seriis di McKay–Thompson.*

Fat meraculôs. *Par ducj i $g \in \mathbb{M}$, la funzion $T_g(z)$ e je l'Hauptmodul $J_{\Gamma_g}(z)$ di un ciert grop modulâr Γ_g tâl che $\overline{\mathcal{H}}/\Gamma_g$ al à gjenar zero! Γ_g al conten come sotgrop normâl $\Gamma_0(N)$ par un ciert N che al dipint dal ordin*[11] *di g.*

Par esempli, in $\mathbb{M}$ a esistin dôs diviersis classis di coniugazion di ordin 2 clamadis $2A$ e $2B$. $T_{2B}(z)$ al è l'Hauptmodul pal grop $\Gamma_0(2)$, *a.v.s.* la funzion $J_2(z)$ te ec.(2.15). Impen $T_{2A}(z)$ al è l'Hauptmodul pal grop $\Gamma_0(2)+$,

$$T_{2A}(z) = q^{-1} + 4372q + 96256q^2 + \cdots. \tag{3.5}$$

Chest al è il meracul. Par spiegâlu al covente cjatâ une costruzion naturâl de rapresentazion graduade $V^\natural$ e mostrâ che la rapresentazion e à lis proprietâts justis.

Tal 1984 Frenkel, Lepowsky e Meurman [7] a àn costruît $V^\natural$ in maniere naturâl come *algjebre di operadôrs–verticş* (une struture algjebriche che e corispuint a la fisiche di une teorie conforme locâl, come te §.2.3). A chest pont Borcherds al doprà un teoreme fisic de teorie de stringhe — il teoreme *'no-ghost'* (= nissune–fantasime[12]) — par costruî une algjebre di Lie infinide $\mathcal{L}$. L'Orculat al agjìs su $\mathcal{L}$ in maniere naturâl. $\mathcal{L}$ e je une algjebre di Lie dal tip 'Kac–Moody gjeneralizât' (scuviert di Borcherds stes). La formule di Weyl–Kac pai caratars di $\mathcal{L}$ e impliche une schirie di identitâts jenfri funzions modulârs. Chestis identitâts, cuntun pocje di vore, a permetin di esplicâ il nestri fat meraculôs e di risolvi il misteri. Chenti nol è il câs di jentrâ tes tecnicalitâts de dimostrazion. Il letôr interessât al pues cjatâ i detais te leteradure [8].

Infin il 'Lusôr di Lune' al è clâr tant *che la lûs dal soreli !!!*

3.3. Significance fisiche

Daûr il caratar espositîf di chest articul no din provis dai risultâts ni o svilupìn la teorie te sô complessitât. Dut câs o vin voie di dâ une cerce dal parcè che il *fat meraculôs* al à di jessi vêr. Lu fasìn dant cualchi sugjestion su la significance fisiche dal Lusôr di Lune.

Cemût che o vin discutût inte §.2.3, une maniere di produsi une funzion invariante modulâr e je chê di considerâ la funzion di partizion di une teorie di cjamp *locâl* invariante conforme. Se cheste e je chirâl, *a.v.s.* lis sôs ondis si propaghin nome viers çampe, alore la funzion $\mathcal{Z}(\tau)$ e je ancje olomorfe[13].

Une teorie fisiche, costruide di Dixon, Ginsparg e Harvey[14] [9], e à juste la propietât che $\mathcal{Z}(\tau) = j(\tau) - 744$. In efiets il so spazi di Hilbert (il spazi dai stâts cuantistics) al è $V^\natural$; il relatîf grât al è dât dal operadôr Hamiltonian $L_0 - c/24 \equiv L_0 - 1$ (*a.v.s.* il grât di un vetôr in $V^\natural$ al è l'energjie dal corispuindent stât cuantistic). Daûr i principis gjenerâi de fisiche cuantisitche, o vin

$$T_g(\tau) = \mathrm{Tr}[g\, q^{L_0 - 1}] = \int [d\Phi] e^{-S[\Phi]} \tag{3.6}$$

là che Φ al rapresente in forme simboliche ducj i cjamps de teorie; tal integrâl funzionâl i cjamps, definîts sul tor di modul τ, a àn lis condizions di periodicitât

$$\Phi(z + \omega_1) = g \cdot \Phi(z), \qquad \Phi(z + \omega_2) = \Phi(z) \tag{3.7}$$

($g \cdot \Phi$ al sta, simbolichementri, pe azion dal element $g \in \mathbb{M}$ sui cjamps Φ).

Cence savê ni lei ni scrivi — ma nome doprant lis proprietâts che *ogni* teorie fisiche e scuen vê — o podìn concludi che:

i) $T_g(\tau)$ e je une funzion olomorfe invariante pal sotgrop discret di $SL(2, \mathbb{R})$ che al lasse invariantis lis condizions di periodicitât (3.7). Al pues sucedi che un sotgrop *plui grant* di chest al sei une invariance di $T_g(\tau)$ par 'resons ancjemò plui magjichis'. Dut câs, il sotgrop che al lasse invariade la condizion di periodicitât al à di jessi un sotgrop *normâl* dal grop modulâr totâl.

ii) $T_g(\tau) = q^{-1}$+regolâr. Chest al derive dal fat che ogni teorie di cjamp e à un e un sôl stât vueit (che duncje al è invariant pe azion dal grop $\mathbb{M}$) adun cul fat che $c = -24$ *a.v.s.* che il vueit al à energjie -1. Par consecuence la funzion $T_g(\tau)$ e à nome un poli — a mancul di ecuivalence modulâr — duncje $T_g(\tau)\colon \mathcal{H}/\Gamma_g \to \mathbf{C} \cup \infty$ e je un–a–un e $\mathcal{H}/\Gamma_g$ al à gjenar zero.

iii) Tant che esempli considerìn il câs che g al vebi ordin 2. Viodìn cuâl sotgrop di $SL(2, \mathbb{Z})$ al lasse invariade la condizion (3.7). Sei $\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$. Alore,

$$\begin{aligned} \Phi(z + \omega_1') &= \Phi(z + a\omega_1 + b\omega_2) = g^a \Phi(z) \\ \Phi(z + \omega_2') &= \Phi(z + c\omega_1 + d\omega_2) = g^c \Phi(z) \end{aligned},$$

dunceje $a = 1$ mod. 2 e $c = 0$ mod. 2. Ma chest al è propit il grop $\Gamma_0(2)$; chest al spieghe l'esempli T_{2B} mintri T_{2A} al corispuint al grop normalizadôr di $\Gamma_0(2)$ in armonie cu la osservazion *i)* parsore vie.

Footnotes/Notis

f1: Une rapresentazion V e je inriducibile se no pues jessi scrite tant che sume direte di dôs rapresentazions $V \neq V_1 \oplus V_2$. Dutis lis rapresentazions V a puedin jessi scritis, tune maniere essenzialmentri uniche, come sume direte di rapresentazions inriducibilis $V = \oplus_k R_k$.

f2: Un sotgrop $H \subset G$ al è *normâl* $\Leftrightarrow gNg^{-1} \subset N$ par ducj i $g \in G$.

f3: Lis retis a son identificadis cu lis geodesichis de metriche (2.1).

f4: In efiets $SL(2, \mathbb{Z})$ al è il grop gjenerât di T e S cu lis relazions $S^2 = (ST)^3 = -1$. (Note che l'element -1 al agjîs su z tant che l'identitât).

f5: In gjenerâl si clame funzion modulâr *di pês* $2k$ (k intîr) une funzion meromorfe in $\mathcal{H}$ (cuntun 'bon' compuartament al infinît) cu la proprietât [6]

$$f(z) = (cz+d)^{-2k}\, f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \quad \text{par dutis lis} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}).$$

f6: La definizion e domande ancje che il compuartament de funzion al infinît nol sedi masse inregolâr. (La singolaritât e à di jessi un poli). Viôt plui indenant.

f7: La bare parsore $\overline{\mathcal{H}}$ e sta a significâ che il plan superiôr $\mathcal{H}$ al è stât sierât zontant il pont al infinît $i\infty$ e dutis lis sôs inmagjinis sot $SL(2, \mathbb{Z})$, *a.v.s.* $\mathbb{Q}$. ($\overline{\mathcal{H}} \equiv \mathcal{H} \cup i\infty \cup \mathbf{Q}$). Domandâ che la funzion f e sedi meromorfe ancje tai ponts zontâts (clamâts *cuspidis*) al è ecuivalent a la condizion a l'infinît menzionade te note 6.

f8: Il grop di Lie E_8 al zue inte teorie dai grops (e des algjebris) di Lie un rodul pareli a chel dal Orculat inte teorie dai grops finîts. La classificazion dai grops/algjebris di Lie *sempliçs* e conten 4 fameis infinidis $SU(n)$, $SO(2n+1)$, $Sp(n)$, $SO(2n)$ e 5 grops/algjebris 'eccezionâi' G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. E_8 al è il grop eccezionâl plui grues (sei in tiermins di dimension, 240, che di ranc, 8). Il so reticul des lidrîs al è l'unic reticul in dimension 8 che al sei: *i)* definît positîf; *ii)* pâr; *iii)* autoduâl. [Un element dal reticul al à la forme $x = \sum_k x_k \vec{e}_k$ $(k = 1, \ldots, 8)$ cun $x_k \in \mathrm{Z}$; in tiermins de matriç $A_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ lis trê condizions sul reticul a deventin: *i)* A definide positive; *ii)* A_{ii} = numar pâr; *iii)* $\det A = 1$].

f9: Ma no mussain olomorfic. In efiets la fisiche nus garantìs nome che l'invariant al pues sei scrit tant che sume di contribûts de forme (funzion olomorfe)$\times$(funzion anti–olomorfe) [a part pal contribût dai mûts-zero come $(\mathrm{Im}\,\tau)^{1/2}$].

f10: Pe definizion viôt [3].

f11: L'ordin di un element g di un grop al è il plui piçul intîr k tâl che $g^k = 1$.

f12: Il teoreme si clame cussì parcè che al garantìs che te stringhe no son presintis particelis cun proprietâts 'assurdis' (clamadis fantasimis) ancje se chestis a son presintis intal formalisim matematic che al descrîf la teorie.

f13: Al è râr che une teorie chirâl e sei dabon locâl par vie des anomaliis chirâls. Ma nol è un problem pal câs in considerazion.

f14: La teorie e je definide in cheste maniere. Considerìn 24 cjamps scjâlars e ju compatifichìn sul tor $\mathrm{R}^{24}/\Lambda_L$, là che Λ_L al è il reticul di Leeche, l'unic reticul definît positîf, pâr e autoduâl in dimension 24 che nol à nissun vetôr di lungjece cuadrade 2 (viôt lis definizions te note 8). La teorie cirude e je *l'orbifold* otignût dividint pal grop $\mathrm{Z}_2 \times \mathrm{Z}_2$ (mudament dal segn separât pes dôs chiralitâts).

Bibliografie

Goddard P. “The work of R.E. Borcherds”. *Math. QA* / 9808136.
Borcherds R.E. “What is Moonshine?”. *Math. QA* / 9809110.
Conway J.H., Norton S. (1979). Monstrous Moonshine. *Bull. Math. Soc.*, 11: 308.
Lang S. (1993). *Algebra* (3rd ed.). Boston: Addison – Wesley.
Gorestein D., Lyons R., Solomon R. (1994). *The Classification of the Finite Simple Group*. Providence: AMS.
Griess R.L. (1982). The Friendly Giant. *Invent. Math.*, 69: 1.
Serre J.P. (1973). *A Course in Arithmetic*. New York: Springher-Verlag.
Frenkel I., Lepowski J., Meurman A. (1988). *Vertex Operator Algebras and the Monster*. San Diego: Accademic Press.
Borcherds R.E. (1992). *Invent. Math.*, 109: 405.
Dixon L., Ginsparg P., Harvey J. (1988). *Comm. Math. Phys.,* 119: 221.